Université A. Assaâdi
Faculté des Sciences
Département de Maths.

SMA_SMI
Algèbre S_1
2008-2009

Contrôle n°1 : Durée 1h30
Documents sont interdits

Exercice 1 : a/ Montrer le théorème de logique suivant :

$$\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ P \Leftrightarrow R \\ Q \Leftrightarrow R \end{cases}$$

b/ Soit l'application $f : X \longrightarrow Y$, montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1/ f injective
2/ $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(X)$ $\quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3/ $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(X)$ $\quad A \cap B = \phi \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \phi$

Exercice 2 : a/ Rappeler la définition d'une partition d'un ensemble E.

b/ Soient E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des parties de E telles que $\phi = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n = E$

On pose $B_1 = A_1 - A_0$, $B_2 = A_2 - A_1$, $\ldots$ $B_n = A_n - A_{n-1}$.

-) Montrer que $\{B_1, \ldots, B_n\}$ est une partition de E.

Exercice 3 : Soit le groupe abélien $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dont la loi de composition interne est l'addition usuelle des couples

$$(a,b) + (a',b') = (a+a',\ b+b')$$

1°/ On pose $H = \{(x,y) \in G \ /\ x+y \text{ est pair}\}$

-) Montrer que H est un sous-groupe de $(G,+)$.

2°/ Montrer que l'application :

$$\varphi : G \longrightarrow H$$
$$(a,b) \longmapsto (a, 2b-a)$$

est un isomorphisme du groupe $(G,+)$ dans le groupe $(H,+)$

ETUDUP .com

Exercice 4: On pose $G' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et on définit dans G' la loi de composition interne $*$ par:

$$(m,n) * (m',n') = (m + (-1)^n m' \, , \, n + n')$$

1/ Montrer que $(G',*)$ est un groupe.

2/ Ce groupe est-il abélien ?

3/ On considère les parties de G :

$H = \{(a,0) / a \in \mathbb{Z}\}$ et $K = \{(0,b) / b \in \mathbb{Z}\}$

-) Montrer que H et K sont des sous-groupes de $(G',*)$.

4/ Montrer que l'application ϕ définie par:

$$\phi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(m,n) \longmapsto n$$

est un morphisme du groupe $(G',*)$ dans $(\mathbb{Z},+)$.

2/2 Fin

ETUDUP .com

ETUSUP.com
Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Mécanique
Droit
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
et encore plus..